VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 1

Realni i kompleksni brojevi

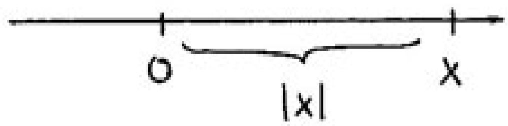
Poglavlje 1

Realni i kompleksni brojevi

Skup realnih brojeva sadrži racionalne (razlomke) i iracionalne brojeve. Svaki element tog skupa može se prikazati u konačnom ili beskonačnom decimalnom zapisu, npr. 3.16, 4.5678, 1.333..., 9.131313..., a možemo ga zamišljati i kao točku nabrojevnom pravcu.

Apsolutna vrijednost realnog broja geometrijski se definira kao udaljenost tog broja od ishodišta na brojevnom pravcu (Slika 1) ili

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ako je} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{ako je} \quad x < 0 \end{cases}$$



Slika 1

Zadatak 1 *Prvo geometrijskom interpretacijom a zatim preko konkretne definicije funkcije apsolutno riješite nejednadžbu* $|x-1| < 2$.

Rješenje:

i) geometrijski: neka je $t = x-1$. Onda imamo $|t| < 2$ što znači da rješenje t čine svi brojevi udaljeni od nule za manje od dva. Jer je $t = x-1$ to znači da $x-1$ mora biti udaljen od nule za manje od dva, tj. da je x udaljen od 1 za manje od dva. Stoga je rješenje intreval $(-1, 3)$

ii) preko definicije: moramo gledati dva slučaja:

   1. $x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x-1| = x-1 \quad$ pa imamo $\quad 1 \leq x < 3$

2. $x-1<0 \quad \Rightarrow \quad |x-1| = 1-x$ pa imamo $-1<x\leq 1$

Sve skupa $x \in (-1,3)$.

Zadatak 2 *Riješite nejednakost* $|x^2-x|+x>1$.

Rješenje: Ponovno moramo razmotriti dva slučaja, $x^2-x>0$ i $x^2-x<0$. Rješavamo jednakost $x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$ pa su rješenja očito $x_1=0$ i $x_2=1$. Stoga imamo:

i) $x^2-x\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty,0] \cup [1,+\infty)$

Sada nejednakost daje:

$$x^2-x+x>1 \quad \Rightarrow \quad x^2>1 \quad \Rightarrow \quad |x|>1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

pa je presjek $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

ii) $x^2-x<0 \quad \Rightarrow \quad x \in (0,1)$

Nejednakost u ovom slučaju glasi:

$$-x^2+x+x>1 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+1=(x-1)^2<0 \quad \text{što nema rješenja u } \mathbb{R}$$

Stoga je konačno rješenje $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Zadatak 3 *Grafičkim putem riješite nejednadžbu:*

$$|x+1|+|y-2|\leq 1$$

Rješenje: Trebamo razmotriti četiri neovisna slučaja:

1. $x+1\geq 0,\ y-2\geq 0$,
2. $x+1<0,\ y-2\geq 0$,
3. $x+1\geq 0,\ y-2<0$,
4. $x+1<0,\ y-2<0$.

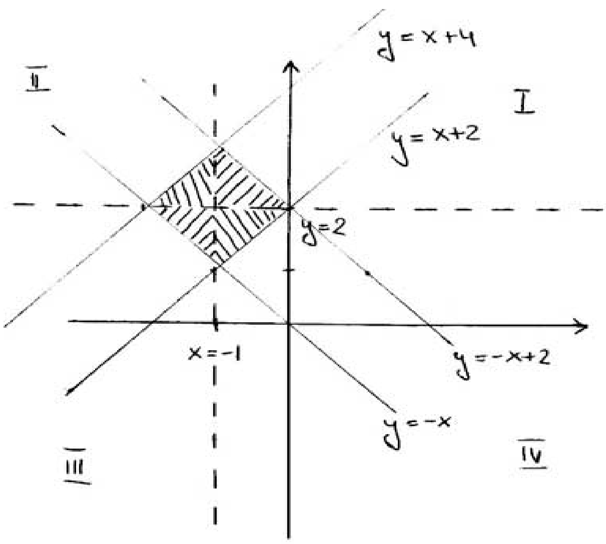
To su, ustvari, područja koja dobijemo kada koordinatnu ravninu podijelimo pravcima $x=-1$ i $y=2$.

Pogledajmo prvi kvadrant, tj. slučaj $x+1\geq 0,\ y-2\geq 0$. U tom slučaju je $|x+1|=x+1$ i $|y-2|=y-2$ i nejednakost izgleda

$$x+1+y-2\leq 1 \quad \Rightarrow y\leq -x+2.$$

Stoga u tom području crtamo pravac $y=-x+2$ i uzimamo područje ispod njega.

Analogno idu i ostala tri slučaja (Slika 2)



slika 2

Svaki **kompleksan broj** se može zapisati kao $z = x + yi$ gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica koja ima svojstvo da $i^2 = -1$. Brojevi x i y se zovu realni, odnosno imaginarni dio od z i pišemo:

$$x = Re(z), \quad y = Im(z).$$

Neka su $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ dva kompleksna broja. Onda je $z_1 = z_2$ ako i samo ako $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. Dalje definiramo:

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) &= x_1 + y_1 + (x_2 + y_2)i, \\ (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) &= (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 + y_1)i.\end{aligned}$$

Uz identifikaciju $x = x + 0 \cdot i$, realne brojeve možemo promatrati kao podskup kompleksnih.

Ako je $z = x + yi$, onda kažemo da je kompleksni broj $\overline{z} = x - yi$ konjugiran broju z.

Svojstva konjugiranja: ako su z i w kompleksni brojevi, onda:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

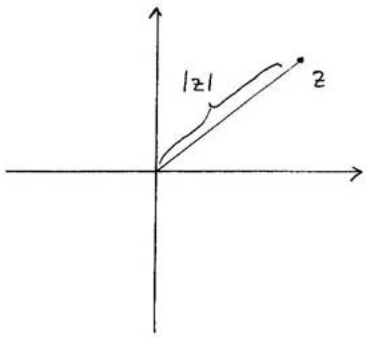
(b) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$

(c) $z + \overline{z} = 2Re(z),\ z - \overline{z} = 2iIm(z)$

(d) $\overline{\overline{z}} = z$

(e) $z\overline{z}$ je realan i pozitivan (osim za $z = 0$ kada je $z\overline{z} = 0$).

Ako je z kompleksni broj, njegova apsolutna vrijednost ili modul $|z|$ se definira kao drugi korijen od $z\overline{z}$ tj. $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. U kompleksnoj ravnini, za $z = (x, y) = x + iy$, apsolutna vrijednost $|z|$ možemo predočiti kao udaljenost točke z od ishodišta (vidi Sliku 3).



Slika 3

Neka je sada $z = x + iy$ proizvoljan kompleksni broj različit od nule . Onda je **apsolutna vrijednost broja** $z \setminus |z|$ jednaka jedan. Slijedi da postoji kut θ takav da

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

tj.

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

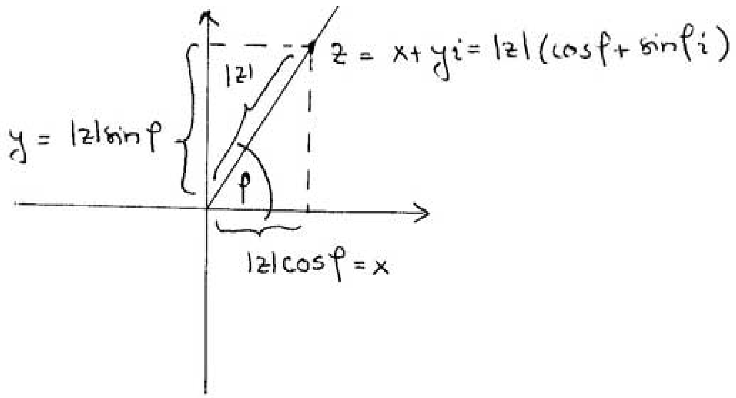
Takav zapis zovemo **polarnom formom** ili **trigonometrijskim oblikom** od z, a $(|z|, \theta)$ zovemo **polarnim koordinatama** kompleksnog broja (pri tome je θ **argument**, $arg(z)$, a $|z|$ **modul**).

$$x = |z|\cos\theta \quad \text{i} \quad y = |z|\sin\theta$$

i dva kompleksna broja $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ su jednaka ako i samo ako

$$|z_1| = |z_2| \qquad \text{i} \qquad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

gdje $k \in \mathbb{Z}$ (Slika 4).



Slika 4

Neka su sada $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1, z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ kompleksni brojevi. Lako se dokazuje da vrijedi formula:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)),$$

iz čega odmah slijedi:

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) + 2k\pi, \qquad \text{gdje} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prethodna formula pokazuje nam također kako se potenciraju kompleksni brojevi; ako uvrstimo $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, dobivamo:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

(Za $|z| = 1$ to je poznata Moivreova formula).

Zadatak 4 *Neka je z kompleksan broj takav da $|z| = 1$. Izračunajte $|1+z|^2 + |1-z|^2$.*

Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned}
|1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z)\overline{(1+z)} + (1-z)\overline{(1-z)} = \\
&= (1+z)(\overline{1}+\overline{z}) + (1-z)(\overline{1}-\overline{z}) = \\
&= (1+z)(1+\overline{z}) + (1-z)(1-\overline{z}) = \\
&= 1 + z + \overline{z} + z\overline{z} + 1 - z - \overline{z} + z\overline{z} = \\
&= 2 + 2|z|^2 = 4
\end{aligned}$$

Zadatak 5 *Riješite jednadžbe:*

(a) $|z+1| + |z+i| = 0,$

(b) $z^2 + iz + 1 = 0,$

(c) $\left|\frac{z}{z+i}\right| = 1 \qquad i \qquad \frac{z}{i\overline{z}} = 1,$

(d) $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|.$

Rješenje:

(a) Neka je $z = x + iy$. Onda imamo

$$|x + 1 + yi| = -|x + (y + 1)i|$$

pa kvadriranjem te jedankosti slijedi:

$$(x + 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$$

odnosno

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$$

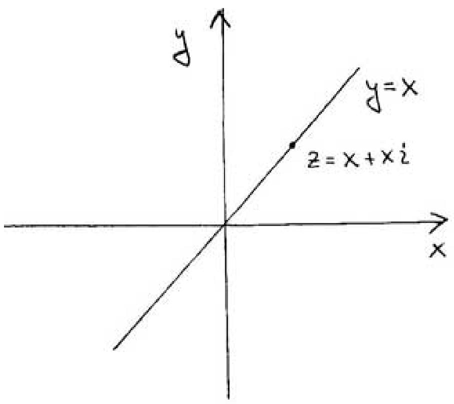
što nakon kraćenja i djeljenja sa dva daje

$$y = x$$

pa je skup rješenja

$$z = \{x + xi \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

U kompleksnoj ravnini to je očito pravac $y = x$. (Slika 5).



Slika 5

(b) Opet označimo $z = x + yi$ i imamo

$$x^2 - y^2 + 2xyi + i(x + yi) + 2 = x^2 - y^2 + 2xyi + ix - y + 2 = 0$$

pa slijedi da imaginarni i realni dio broja s lijeve strane moraju biti jednaki nuli. Znači

$$x^2 - y^2 - y + 2 = 0 \quad \text{i} \quad 2xy + x = 0$$

Iz druge jednakosti slijedi da $x = 0$ ili $y = -\frac{1}{2}$. Neka $x = 0$. Onda prva jednakost daje:

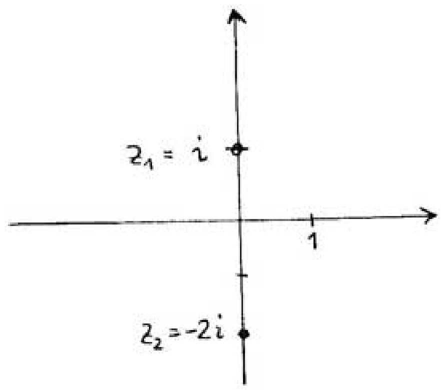
$$y^2 + y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1,\ y_2 = -2$$

Ako $y = -\frac{1}{2}$ onda iz prve jednakosti dobivamo

$$x^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{9}{4}$$

što ne može biti jer je x realan.

Stoga su jedina rješenja $z_1 = i$ i $z_2 = -2i$ (Slika 6).



Slika 6

(c) Neka $z = x + iy$. Dobivamo:

$$|x + yi| = |x + (y + 1)i| \quad \text{i} \quad x + yi = ix + y.$$

Iz druge jednakosti očito slijedi da $x = y$ pa prva jednakost daje

$$2x^2 = x^2+(x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = x^2+x^2+2x+1 \quad \Rightarrow \quad 2x+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Jedino rješenje je, dakle, $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Zadatak 6 *Dokažite da*

$$Re(z) > 0 \quad i \quad Re(a) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{a - z}{\overline{a} + z}\right| < 1.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} |a - z|^2 - |\overline{a} + z|^2 &= (a - z)(\overline{a} - \overline{z}) - (\overline{a} - z)(a - \overline{z}) \\ &= -(a\overline{z} + \overline{a}z + az + \overline{az}) \\ &= -(a + \overline{a})(z + \overline{z}) \\ &= -4Re(a) \cdot Re(z). \end{aligned}$$

Odavde slijedi:

$$|a - z|^2 - |\overline{a} + z|^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad |a - z|^2 < |\overline{a} + z|^2 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{a - z}{\overline{a} + z}\right| < 1.$$

Zadatak 7 *Skicirajte u kompleksnoj ravnini brojeve koji zadovoljavaju sljedeće nejednakosti:*

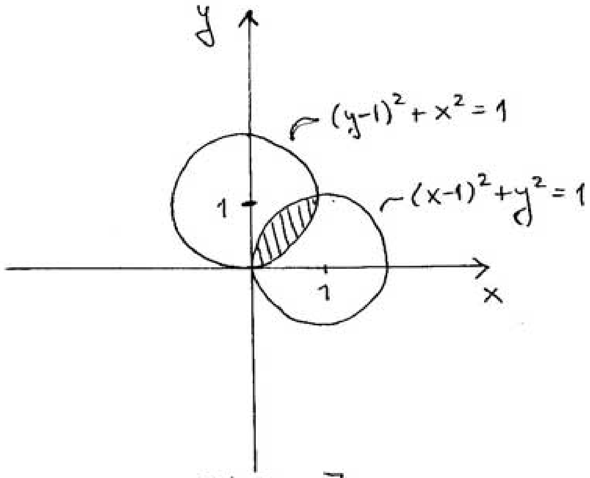
$$|z - i| \leq 1 \qquad i \qquad |z - 1| \leq 1.$$

Rješenje:

Ako stavimo $z = x + yi$ i kvadriramo gornje nejednakosti, dobivamo

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad \text{i} \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

pa je rješenje presjek krugova $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ i $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. (Slika 7)



Slika 7

Zadatak 8 *Geometrijski prikazati rješenja sljedeće nejednadžbe:*

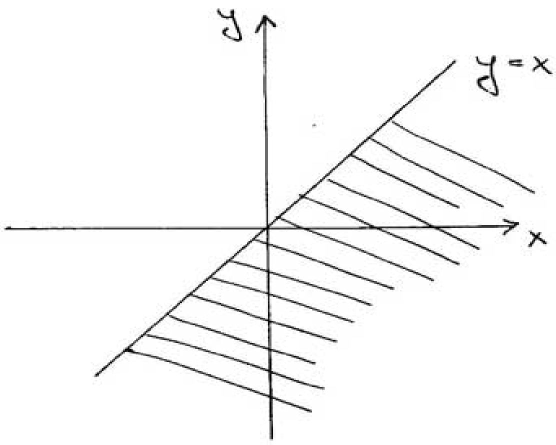
$$Re((1+i)z) \leq 0.$$

Rješenje:

Imamo

$$(1+i)z = (1+i)(x+yi) = x + yi + xi - y$$

pa je rješenje poluravnina $x \leq y$ (Slika 8).



Slika 8

Zadatak 9 *Pokažite da je*

$$Im\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)=0$$

jednadžba pravca koji prolazi fiksnim točkama z_1 *i* z_2. *Ako je* $z_1 = 1+i$ *a* $z_2 = 3+5i$, *nacrtajte skup koji zadovoljava* $Im\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) > 0$.

Rješenje:

Stavimo $z = x+yi$, $z = x+yi$ i $z = x+yi$. Onda je

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{x+yi-x_1-y_1 i}{x_2+y_2 i-x_1-y_1 i}\cdot\frac{x_2-x_1-(y_2-y_1)i}{x_2-x_1-(y_2-y_1)i} = \frac{((x-x_1)+(y-y_1)i)((x_2-x_1)-(y_2-y_1)i)}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

i da bi imaginarni dio tog broja bio nula, dovoljno je da imaginarni dio brojnika bude nula jer je nazivnik nakon racionalizacije realan. Dakle mora biti

$$-(x-x_1)(y_2-y_1)+(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

tj

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

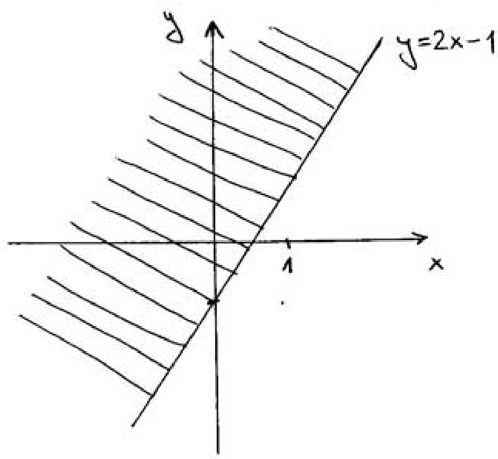
što je točno jednadžba pravca kroz točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Nejednakost sada izgleda:

$$-(x-x_1)(y_2-y_1)+(x_2-x_1)(y-y_1)>0 \quad \Rightarrow \quad (x_2-x_1)(y-y_1)>(x-x_1)(y_2-y_1)$$

Uvrstimo zadane vrijednosti za z_1 i z_2 te dobivamo

$$2(y-1)>4(x-1) \quad \Rightarrow \quad y>2x-1$$

(Slika 9)



Slika 9

Zadatak 10 *Izračunajte:*

$$(a) \qquad (1-i)^{15} \qquad\qquad (b) \qquad (1+i\sqrt{3})^7.$$

Rješenje:

(a) Prvo prebacujemo broj u trigonometrijski oblik:

$$|z| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

pa zaključujemo da je

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad \sin = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{7\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}i\right)$$

Sada imamo

$$z^{15} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}i\right)\right)^{15} = \sqrt{2}^{15}\left(\cos\frac{15\cdot 7\pi}{4} + \sin\frac{15\cdot 7\pi}{4}i\right).$$

Primjetimo da je $15 \cdot 7 = 105 = 26 \cdot 4 + 1$ pa

$$z^{15} = \sqrt{2}^{15}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}i\right) = \sqrt{2}^{15}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2^7 + 2^7 i$$

zbog 2π periodičnosti trigonometrijskih funkcija.

(b) Ponovo prebacujemo z u trigonometrijski oblik.

$$|z| = \sqrt{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Sad imamo da je $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, a $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pa slijedi $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Stoga

$$z^7 = 2^7\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)^7 = 2^7\left(\cos\frac{7\pi}{3} + \sin\frac{7\pi}{3}i\right).$$

Ovdje opet imamo $7 = 2\cdot 3 + 1$ i zbog periodičnosti dobivamo

$$z^7 = 2^7\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}i\right) = 2^7\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^6(1+\sqrt{3}i).$$

Zadatak 11 *Dokazati da je $(1+i)^{4k}$ realan, a $(1+i)^{4k+2}$ čisto imaginaran broj za k prirodan broj, $k \in \mathbb{N}$.*

Rješenje:
Primjetimo da je

$$(1+i)^2 = 2i \quad \text{i} \quad (1+i)^4 = -4.$$

Odatle odmah slijede tvrdnje zadatka.

Zadatak 12 *Predočite grafički kompleksne brojeve koji zadovoljavaju nejednakosti:* $2 \le |iz-1| \le 3$.

Rješenje:

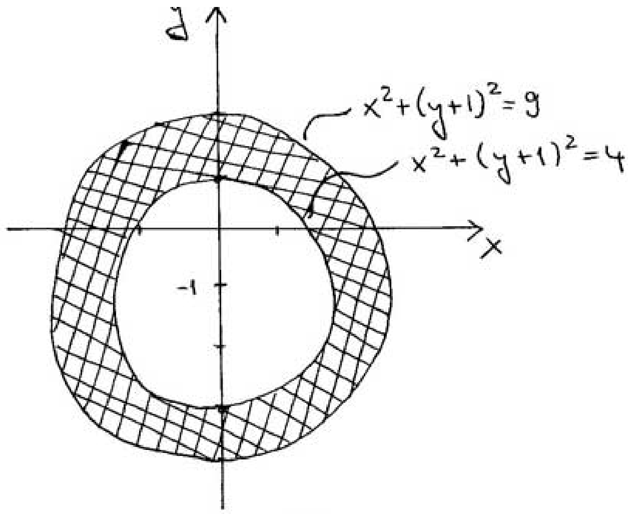
Radi se o dvije nejednakosti. Neka je $z = x + yi$, onda imamo:

$$2 \leq |ix - y - 1| \quad \text{i} \quad |ix - y - 1| \leq 3.$$

Kvadriramo (što smijemo jer je sve pozitivno) i dobijamo:

$$4 \leq (y+1)^2 + x^2 \quad \text{i} \quad (y+1)^2 + x^2 \leq 9.$$

Očito je riječ o kružnom vijencu omeđenom kružnicama $x^2 + (y+1)^2 = 4$ i $x^2 + (y+1)^2 = 9$ (Slika 10).



Slika 10

Zadatak 13 *Odredite skup točaka u ravnini što je određen uvjetom:*

(a) $\left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1$

(b) $\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| \geq 1$

(c) $\left|\frac{z+2-i}{z+i}\right| \leq 1$

Rješenje:

(b) Imamo

$$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |z-2| \geq |z+1-i|$$

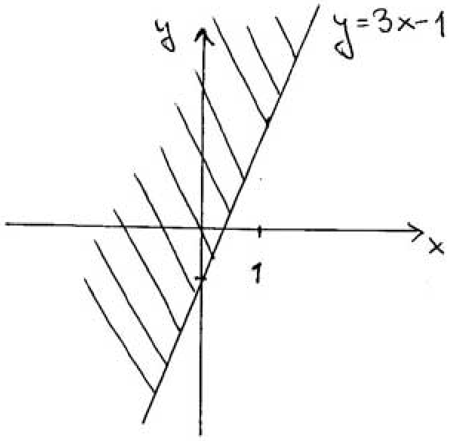
pa ako uvrstimo $z = x + yi$ i kvadriramo (što smijemo jer su obje strane pozitivne) slijedi:

$$(x-2)^2+y^2 \geq (x+1)^2+(y-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+4+y^2-x^2-2x-1-y^2+2y-1 \geq 0$$

odnosno

$$-6x + 2y + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq 3x - 1.$$

Znači, u pitanju je područje iznad $y = 3x - 1$ pravca u kompleksnoj ravnini (Slika 11).



Slika 11

Zadatak 14 *Neka je* $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *i* $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. *Dokažite da*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Zaključite da $arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Rješenje:

Ako je $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, onda je $\overline{z_2} = |z_2|(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{|z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) = \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}((\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)i) = \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)i)
\end{aligned}$$